Uitwerkingen CCVW Wiskunde A 20-4-2023

Vraag 1a - 6 punten

$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 16x$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - 3x - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 - 3x - 4 = 0$

$x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-4) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 4$

Mag uiteraard ook met de abc-formule.

$f(0) = 0;\ f(-1) = -3,\ f(4) = -128$

De minimumwaarde is dus $f(4) = -128$

Want voor grote negatieve of positieve waarden van x is $f(x)$ een groot positief getal.

Vraag 1b - 6 punten

$g'(x) = \dfrac{4 \cdot 2x}{2 \cdot \sqrt{4x^2+48}}$

$g'(x) = -1 \Leftrightarrow 4 \cdot 2x = -2 \cdot \sqrt{4x^2 + 48} \Leftrightarrow 4x = -\sqrt{4x^2 + 48} \Rightarrow 16x^2 = 4x^2 + 48$

Dit geeft $12x^2 = 48 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2$

$g'(2) = 1$ en $g'(-2) = -1$, dus alleen $x = -2$ voldoet

Vraag 1c - 4 punten

$\log(R) = 2\log(Q) + 3 \Leftrightarrow 10^{\log(R)} = 10^{2\log(Q)+3} \Leftrightarrow R = 10^{2\log(Q)+3}$

Dit geeft $R = 10^{2\log(Q)} \cdot 10^3 = 10^{\log(Q^2)\cdot} \cdot 10^3 = Q^2 \cdot 1000$

Hieruit volgt $c = 1000$ en $d = 2$

Alternatief:

$2\log(Q) + 3 = \log(Q^2) + \log(1000) = \log(Q^2 \cdot 1000)$

Dit geeft $\log(R) = \log(Q^2 \cdot 1000) \Leftrightarrow R = Q^2 \cdot 1000$

Hieruit volgt $c = 1000$ en $d = 2$

Vraag 2a - 5 punten

$P = 2 \Leftrightarrow \dfrac{30t}{t^2 + 36} = 2 \Leftrightarrow 30t = 2(t^2 + 36) \Leftrightarrow 15t = t^2 + 36 \Leftrightarrow t^2 - 15t + 36 = 0$

$\Leftrightarrow (t-3)(t-12) = 0 \Leftrightarrow t = 3 \vee t = 12$

Mag uiteraard ook met de abc-formule.

$P > 2$ als $3 < t < 12$, dat is gedurende $12 - 3 = 9$ weken

Vraag 2b - 5 punten

$\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}T} = \dfrac{30(t^2 + 36) - 30t \cdot 2t}{(t^2 + 36)^2}$

$\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}T} = 0 \Leftrightarrow 30(t^2 + 36) - 30 \cdot 2t^2 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 36 - 2t^2 = 0 \Leftrightarrow 36 - t^2 = 0 \Leftrightarrow t^2 = 36 \Leftrightarrow t = \pm 6$

$t = 6$ geeft $P = \frac{30 \cdot 6}{36+36} = \frac{180}{72} = 2{,}5$; $t = -6$ valt buiten het domein van *P*.

Vraag 2c - 5 punten

$\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}T} = 1{,}4 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}2t} + 1{,}4t \cdot \mathrm{e}^{-0{,}2t} \cdot -0{,}2$

$\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}T} = 0 \Leftrightarrow 1{,}4 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}2t} - 1{,}4 \cdot 0{,}2t \cdot \mathrm{e}^{-0{,}2t} = 0 \Leftrightarrow 1{,}4\mathrm{e}^{-0{,}2t} = 1{,}4 \cdot 0{,}2t \cdot \mathrm{e}^{-2t} \Leftrightarrow 1 = 0{,}2t \Leftrightarrow t = 5$

Vraag 3a - 4 punten

Als X het aantal zetten is dat Albert bij de eerste worp krijgt, dan geldt:

$$E(X) = 6 \cdot P(X = 6) + 5 \cdot P(X = 5) + 4 \cdot P(X = 4) + 3 \cdot P(X = 3) + 2 \cdot P(X = 2)$$
$$+10 \cdot P(X = 10) + 25 \cdot P(X = 25)$$
$$= 6 \cdot 0{,}10 + 5 \cdot 0{,}13 + 4 \cdot 0{,}17 + 3 \cdot 0{,}20 + 2 \cdot 0{,}25 + 10 \cdot 0{,}10 + 25 \cdot 0{,}05 = 5{,}28$$

Vraag 3b - 4 punten

$P(beide\ worpen\ 6) = 0{,}10 \cdot 0{,}10 = 0{,}01$

$P(eerste\ worp\ 2, tweede\ worp\ 10) = 0{,}25 \cdot 0{,}10 = 0{,}025$

$P(eerste\ worp\ 10, tweede\ worp\ 2) = 0{,}10 \cdot 0{,}25 = 0{,}025$

De gevraagde kans is dus $0{,}01 + 0{,}025 + 0{,}025 = 0{,}06$

Vraag 3c - 4 punten

Albert krijgt meer dan 10 zetten als hij tenminste één keer geen 2 zetten krijgt.

De kans dat hij bij alle worpen 2 zetten krijgt is $0{,}25^5$

De gevraagde kans is dus $1 - 0{,}25^5 = 0{,}9990234375$

Vraag 3d - 4 punten

Het team van Albert bestaat alleen uit mannen als Eddie en Freddie beide bij hem in het team zitten. Het andere team bestaat dan alleen uit vrouwen.

Er zijn $\binom{5}{2} = 10$ manieren waarop de andere twee spelers in het team van Albert gekozen kunnen worden. Bij precies één van die manieren komen Eddie en Freddie in het team van Albert.

De kans dat dit gebeurt is dus $\frac{1}{10}$

Alternatief 1:

Er zijn $\binom{6}{3} = 20$ manieren om een team van 3 van de zes spelers te vormen.

Bij één van die manieren bestaat het eerste team dat gevormd wordt uit mannen (en het andere team uit vrouwen). Er is ook één manier waarop het eerste team dat gevormd wordt uit vrouwen bestaat (en het andere uit mannen).
Bij 2 van de 20 manieren bestaan de teams dus uit alleen mannen en alleen vrouwen

De kans hierop is $\frac{2}{20} = \frac{1}{10}$

Alternatief 2:

Je kunt de teams vormen door de zes spelers op een rij te zetten.

$P(MMMVVV) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{20}$

$P(VVVMMM) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{20}$

De gevraagde kans is dus $\frac{1}{20} + \frac{1}{20} = \frac{1}{10}$

Vraag 4a - 3 punten

Bij lineaire groei neemt het aantal otters van 2015 tot 2020 evenveel toe
als tussen 2010 en 2015. Dit is hier niet het geval want $80 - 60 \neq 60 - 45$

Bij exponentiële groei groeit het aantal otters van 2015 tot 2020 met dezelfde factor
als tussen 2010 en 2015. Dit is hier wel het geval want $\frac{80}{60} = \frac{60}{45} = \frac{4}{3}$

Een exponentieel model past dus het beste bij deze gegevens

Vraag 4b - 4 punten

Groeiformule: $A = b \cdot g^t$ met $g = 1{,}04$

Verdubbeling geeft $1{,}04^t = 2$ dus $t = {}^{1{,}04}\log(2) \approx 17{,}67$ jaar

Dit is $12 \times 17{,}67 \approx 212$ maanden (ofwel 17 jaar en 8 maanden)

Vraag 4c - 6 punten

De minimale waarde van A is 70, de maximale waarde van A is 120.

Dit geeft $a = evenwichtsstand = \frac{70+120}{2} = \frac{190}{2} = 95$

en $b = amplitude = 120 - 95 = 95 - 70 = 25$

$periode = \frac{2\pi}{c}$ geeft $c = \frac{2\pi}{periode} = \frac{2\pi}{4} = \frac{1}{2}\pi$

Op $t = 0$ is A maximaal, dus is $\sin\big(c(t-d)\big) = \sin\left(\frac{1}{2}\pi \cdot -d\right)$ gelijk aan $\sin\left(\frac{1}{2}\pi\right)$

Dit geeft $-d = 1 \Leftrightarrow d = -1$

Alternatief voor de berekening van d:

De evenwichtsstand wordt stijgend gepasseerd op $t = \frac{3}{4}\,periode = \frac{3}{4} \cdot 4 = 3$

$t - d = 0$ geeft dan $3 - d = 0 \Leftrightarrow d = 3$

Ook goed zijn $d = -5$, $d = -9$ etc. en $d = 7$, $d = 11$ etc

Vraag 5a - 5 punten

$72{,}1 = 76{,}5 - 2 \cdot 2{,}2 = \mu - 2\sigma$; $78{,}7 = 76{,}5 + 2{,}2 = \mu + \sigma$

Volgens de vuistregels heeft 68% een lengte tussen $\mu - \sigma$ en $\mu + \sigma$
en heeft 95% een lengte tussen $\mu - 2\sigma$ en $\mu + 2\sigma$

Dit betekent dat $\frac{68}{2} = 34\%$ een lengte heeft tussen μ en $\mu + \sigma$

en dat $\frac{95}{2} = 47{,}5\%$ een lengte heeft tussen $\mu - 2\sigma$ en μ

Hieruit volgt dat $47{,}5 + 34 = 81{,}5\%$ een lengte heeft tussen $\mu - 2\sigma$ en $\mu + \sigma$

Vraag 5b - 2 punten

H_0: $\mu = 76{,}5$; H_1: $\mu \neq 76{,}5$

Vraag 5c - 5 punten

De toetsingsgrootheid T, de gemiddelde lengte van de bonobo's in de steekproef,
is normaal verdeeld met $\mu_T = 76{,}5$ en $\sigma_T = \frac{2{,}2}{\sqrt{16}} = \frac{2{,}2}{4} = 0{,}55$

De linker grens bij deze tweezijdige toetsingsprocedure met $\alpha = 0{,}05$ is
$g_l = \mu_T - 1{,}96\sigma_T = 76{,}5 - 1{,}96 \cdot 0{,}55 = 75{,}422$
De gevonden steekproefuitkomst ligt tussen deze linker grens en μ_T
(en dus ook tussen deze linker grens en de rechter grens $g_l = \mu_T + 1{,}96\sigma_T$)
Dit betekent dat de nulhypothese niet wordt verworpen
(De gemiddelde lengte van de bonobo's in de dierentuin wijkt dus niet significant af van de gemiddelde lengte van de bonobo's in het wild)